TEMA 1

LOS NÚMEROS COMPLEJOS, ESTRUCTURA ALGEBRAICA Y TOPOLOGÍA

1 Los números complejos, operaciones y propiedades

1.1 El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos

Se define el conjunto de los **números complejos**:

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

Operación suma $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Propiedades de la suma

1. Asociatividad: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
2. Elemento neutro (e. nulo o cero): $\exists\, (0,0) \in \mathbb{C} \,/\, (0,0) + z = z + (0,0) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
3. Elemento simétrico (opuesto): $\forall\, z = (x, y) \in \mathbb{C}$ el elemento $(-x, -y) =: -z \in \mathbb{C}$ y verifica $z + (-z) = -z + z = (0,0)$.
4. Conmutatividad: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$(\mathbb{C}, +)$ es un grupo (prop. 1+2+3) conmutativo o abeliano (prop. 4)

Operación producto $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definidas para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Propiedades del producto

1. Asociatividad: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
2. Elemento neutro (e. unidad o uno): $\exists\, (1,0) \in \mathbb{C} \,/\, (1,0) \cdot z = z \cdot (1,0) = z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.
3. Elemento simétrico (inverso): $\forall\, z = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ el elemento $\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) =: z^{-1}$ verifica $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = (1,0)$.
4. Conmutatividad: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo o abeliano

Distributividad del producto respecto a la suma

$\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ se tiene que $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo

De los axiomas de cuerpo conmutativo se deducen, entre otras, las siguientes

Propiedades En $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ se verifica:

1. El cero y el uno son únicos.
2. El opuesto de $z \in \mathbb{C}$ es único y el inverso de $z \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ también es único.
3. El producto de cualquier número complejo por cero es cero.
4. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica que $-z$ es el producto de z por el opuesto de la unidad.
5. Si el producto de dos números complejos es el cero, alguno de los dos debe ser el cero.

El producto permite definir:

División de números complejos: Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y z_2 no es el cero, la *división o cociente* de z_1 entre z_2 es

$$z_1 \cdot z_2^{-1} =: \frac{z_1}{z_2}$$

NOTA: La propiedad 4 se reformula: $\mathbb{C}$ no tiene divisores de cero.

La división compleja tiene propiedades semejantes a la de los números reales y se deducen de la definición y de los axiomas de cuerpo trivialmente.

Relación entre los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow (x, 0) \end{aligned}$$

1. ϕ es un *homomorfismo de cuerpos*: $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
$$\phi(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = \phi(x_1) + \phi(x_2),$$
$$\phi(x_1 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2, 0) = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = \phi(x_1) \cdot \phi(x_2).$$
2. $\phi(\mathbb{R}) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$: Si $z_1, z_2 \in \phi(\mathbb{R})$ entonces $z_1 = (x_1, 0)$, $z_2 = (x_2, 0)$ con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y se verifica
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, 0) \in \phi(\mathbb{R})$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2, 0) \in \phi(\mathbb{R})$$
3. ϕ es una aplicación inyectiva.

ϕ es un isomorfismo de cuerpos entre $\mathbb{R}$ y $\phi(\mathbb{R})$

Dado $x \in \mathbb{R}$, el isomorfismo ϕ entre los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\phi(\mathbb{R})$ permite identificar

$$x \equiv \phi(x) = (x, 0)$$

Así, definiendo la *unidad imaginaria* como $(0, 1) =: i$, se tiene

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \equiv x + iy \qquad \text{Forma binómica}$$

Se denomina parte real de z a $x =: \operatorname{Re} z$, y parte imaginaria de z a $y =: \operatorname{Im} z$.

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot,)$ es un cuerpo conmutativo ordenado y completo, pero no es algebraicamente cerrado.
2. $(\mathbb{C}, +, \cdot,)$ es un cuerpo conmutativo completo y algebraicamente cerrado.
3. $\mathbb{C}$ es el menor cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$.
4. $(\mathbb{C}, +, \cdot,)$ no es un cuerpo ordenado.

La aplicación conjugado

La biyección

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & \bar{z} = x - iy \end{array}$$

se denomina *aplicación conjugado* y se dice que $\bar{z} = x - iy$ es el conjugado de $z = x + iy$.

Propiedades

1. Es un isomorfismo en $\mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{array}\right\} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

   Obviamente, el conjugado de un cociente es el cociente de conjugados.

2. $\bar{\bar{z}} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
3. $\bar{z} = z$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$; luego la aplicación conjugado deja fijo cada elemento de $\mathbb{R}$ y, por tanto, también a $\mathbb{R}$.
4. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene

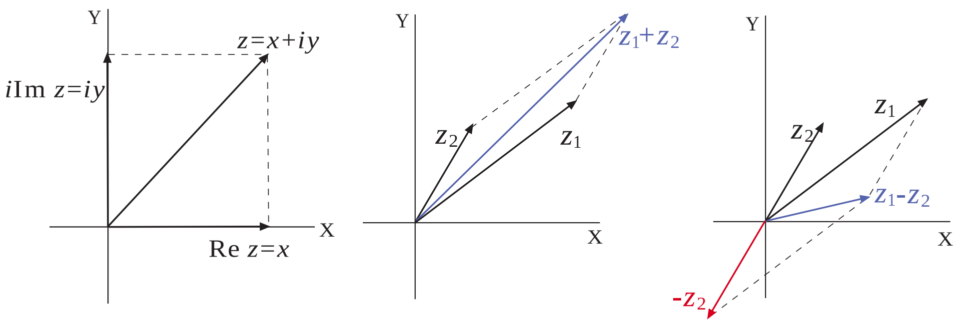
$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

1.2 El espacio vectorial normado de los números complejos

$$\begin{array}{l} \text{Dada } \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \qquad\quad (\lambda, z) \longrightarrow \lambda \cdot z \end{array} \longrightarrow \begin{cases} \lambda \cdot (\mu \cdot z) = (\lambda \cdot \mu) \cdot z, \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \forall z \in \mathbb{C} \\ 1 \cdot z = z, \ \forall z \in \mathbb{C} \\ \lambda \cdot (z_1 + z_2) = \lambda \cdot z_1 + \lambda \cdot z_2, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ (\lambda + \mu) \cdot z = \lambda \cdot z + \mu \cdot z, \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \forall z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

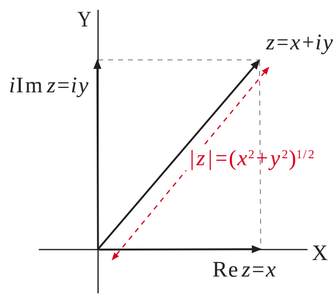
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Representación gráfica



La aplicación módulo

$$\begin{array}{ccc} |\ | : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z = x + iy & \longrightarrow & |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$



Propiedades

1. $|z| \geq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}$. Además, $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \\ \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z| \end{array}\right\} \forall z \in \mathbb{C}.$
3. $|z| = |\bar{z}| = |-z|, \ \forall z \in \mathbb{C}$.
4. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}, \ \forall z \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2, \ \forall z \neq 0$.
5. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se tiene $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ y si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

   En particular, $|\lambda \cdot z| = |\lambda| \cdot |z|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall z \in \mathbb{C}$

6. Desigualdad triangular: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
7. Desigualdad triangular inversa: $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$1 + 5 + 6 \Longrightarrow |\ |$ es una norma en $\mathbb{C}$ (norma euclídea)

$\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son equivalentes como espacios vectoriales normados:

$$(\mathbb{C}, +, \cdot, |\ |) \approx (\mathbb{R}^2, +, \cdot, \|\ \|_2)$$

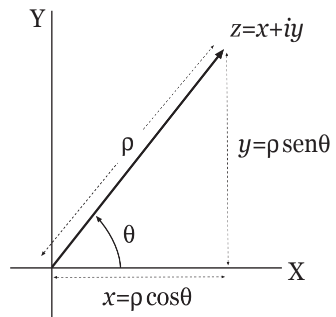
donde $\|\ \|_2$ denota la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ y $\cdot$ es el producto por escalares.

Nota: La métrica asociada a la norma euclídea en $\mathbb{C}$, denominada **métrica euclídea**, es la aplicación

$$\begin{aligned} d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) &\longrightarrow d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \longrightarrow \end{aligned} \begin{cases} 1.\ d(z_1, z_2) \geq 0,\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \\ \quad d(z_1, z_2)) = 0 \iff z_1 = z_2 \\ 2.\ d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1),\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ 3.\ d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son equivalentes como espacios métricos: $(\mathbb{C}, d) \approx (\mathbb{R}^2, d_2)$
donde d_2 indica la métrica euclídea en $\mathbb{R}^2$.

1.3 Forma exponencial de un número complejo



Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ queda determinado unívocamente por

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Distancia al origen: } |z| =: \rho \\ \bullet \text{ Ángulo entre el eje real} \\ \quad \text{positivo y el vector de posición: } \theta \end{array}\right\} \text{Coord. polares de } z$$

Relación coord. cartesianas y polares de z $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

De la periodicidad de las f. trigonométricas y la fórmula de Euler, $e^{i\theta} =: \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$:

$z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = \rho(\cos(\theta+2k\pi) + i\operatorname{sen}(\theta+2k\pi)),\ k \in \mathbb{Z}$ Forma módulo-argumental

$z = \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta+2k\pi)},\quad k \in \mathbb{Z}$ Forma exponencial

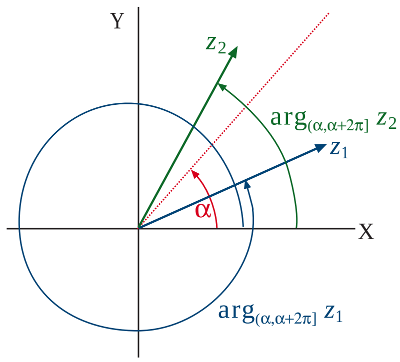
El conjunto $\arg z =: \left\{\theta \in \mathbb{R}\ :\ \cos\theta = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} \ \wedge\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right\}$ se llama argumento de z

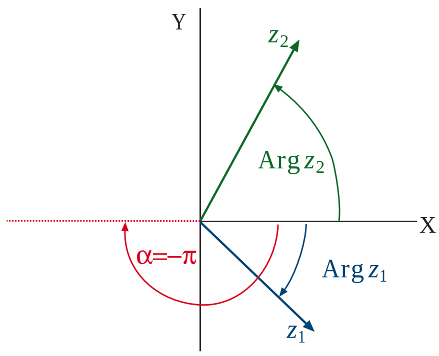
Ejemplo 1. Cálculo de $\arg z$ $\forall z \in (\mathbb{R} \cup \{iy : y \in \mathbb{R}\}) \setminus \{0\}$ y forma exponencial.

Determinaciones del argumento

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. Se define:
   - Valor o determinación del argumento de z: Cada valor $\theta \in \arg z$
   - Valor principal del argumento o argumento principal de z: $\operatorname{Arg} z = \theta \in \arg z \cap (-\pi, \pi]$
2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un único $\theta_\alpha \in \arg z \cap (\alpha, \alpha + 2\pi]$. Notamos $\theta_\alpha =: \arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]} z$.
   En particular, $\arg_{(-\pi,\pi]} z = \operatorname{Arg} z$. Análogamente para $[\alpha, \alpha + 2\pi)$.





Observación:

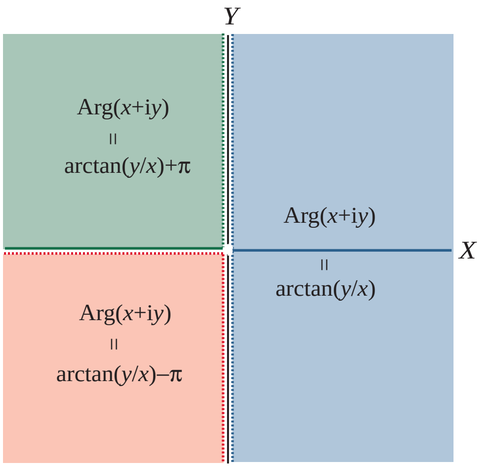
$$\boxed{\theta_1, \theta_2 \in \arg z \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi}.$$

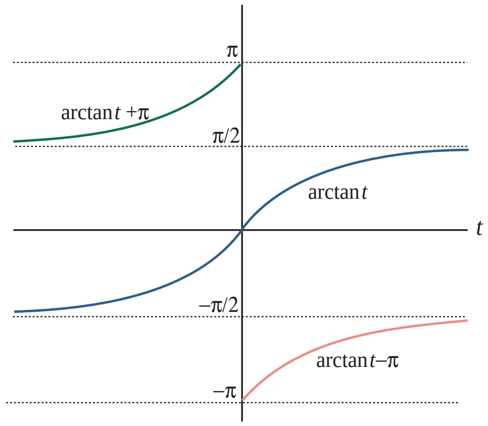
Luego, si se conoce una determinación del argumento de z, por ejemplo $\operatorname{Arg} z$, para encontrar otro valor $\theta_\alpha = \arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]} z$ basta tener en cuenta que $\theta_\alpha = \operatorname{Arg} z + 2k_\alpha\pi$, para algún $k_\alpha \in \mathbb{Z}$, y encontrar k_α como solución de

$$\alpha < \operatorname{Arg} z + 2k\pi \leq \alpha + 2\pi.$$

Cálculo de $\operatorname{Arg} z \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(x+iy) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } x = 0 \ \wedge \ y < 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \ \wedge \ y > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0 \ \wedge \ y \geq 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi & \text{si } x < 0 \ \wedge \ y < 0 \end{cases}$$





Ejemplo 2. Dado $z_0 = -\sqrt{3} + i$, cálculo de $\operatorname{Arg} z_0$ y de $\arg_{(-3\pi/2, \pi/2]} z_0$.

Propiedades de los argumentos

Proposición 1.

1. $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$ para cualesquiera $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.
2. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ y $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
3. $e^{i(\theta_1-\theta_2)} = e^{i\theta_1}/e^{i\theta_2}$ para cualesquiera $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

Corolario 1.1. Se verifica:

1. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si $\theta_1 \in \arg z_1$ y $\theta_2 \in \arg z_2$ entonces $\theta_1 + \theta_2 \in \arg(z_1 \cdot z_2)$ y se cumple
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \, e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$
2. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si $\theta \in \arg z$ entonces $-\theta \in \arg \bar{z} \cap \arg(z^{-1})$ y se cumple
$$\bar{z} = |z| \, e^{-i\theta} \quad \text{y} \quad z^{-1} = |z|^{-1} \, e^{-i\theta}.$$
3. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si $\theta_1 \in \arg z_1$ y $\theta_2 \in \arg z_2$ entonces $\theta_1 - \theta_2 \in \arg(z_1/z_2)$ y se cumple
$$z_1/z_2 = |z_1||z_2|^{-1} \, e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Ejemplo 3.

a) Determinación de la forma exponencial de $z_0 = (\sqrt{3}+i)\cdot(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$.

b) Cálculo de $\dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2}{(-\sqrt{3}+i)^3}$.

Corolario 1.2. Se verifica:

1. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, existe $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\arg_{(\alpha_1,\alpha_1+2\pi]} z_1 + \arg_{(\alpha_2,\alpha_2+2\pi]} z_2 = \arg_{(\alpha_3,\alpha_3+2\pi]}(z_1\cdot z_2)$$

2. Dados $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]}(z^{-1}) = \arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]}(\bar{z}) = -\arg_{(\beta,\beta+2\pi]}(z)$$

3. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, existe $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\arg_{(\alpha_1,\alpha_1+2\pi]} z_1 - \arg_{(\alpha_2,\alpha_2+2\pi]} z_2 = -\arg_{(\alpha_3,\alpha_3+2\pi]}(z_1/z_2)$$

Observación: Las igualdades del corolario 1.2 son falsas si las determinaciones del argumento están en el mismo intervalo.

Ejemplo para el producto: Sean $z_1 = i$ y $z_2 = -1$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2) = \operatorname{Arg}(-i) = -\pi/2 \\ \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2} + \pi = 3\pi/2\end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2) \neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

Ejemplo para el inverso:

$$\arg_{[0,2\pi)}(z^{-1}) \neq -\arg_{[0,2\pi)} z \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x \geq 0\},$$

pues $-2\pi < -\arg_{[0,2\pi)} z < 0$

Ejemplo para el cociente: Sean $z_1 = i$ y $z_2 = -1$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\arg_{[0,2\pi)}(z_1/z_2) = \arg_{[0,2\pi)}(-i) = 3\pi/2 \\ \arg_{[0,2\pi)} z_1 - \arg_{[0,2\pi)} z_2 = \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{-\pi}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \arg_{[0,2\pi)}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \neq \arg_{[0,2\pi)} z_1 - \arg_{[0,2\pi)} z_2$$

Sin embargo,

Proposición 2. Se verifica:

1. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]} z_1 + \arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]} z_2 = \arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]}(z_1\cdot z_2) + 2k_1\pi.$$

$$\arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]} z_1 - \arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]} z_2 = \arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]}(z_1/z_2) + 2k_2\pi.$$

2. Dados $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

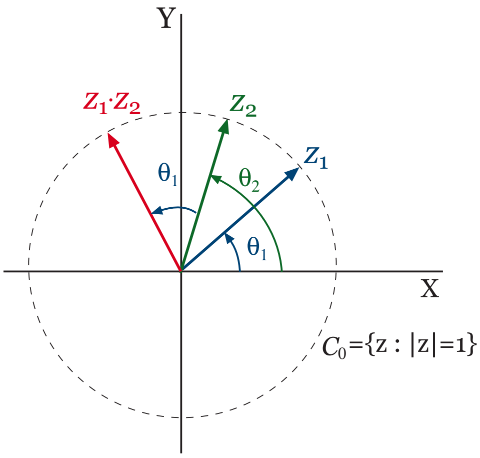
$$\arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]}(z^{-1}) = -\arg_{(\alpha,\alpha+2\pi]} z + 2k\pi.$$

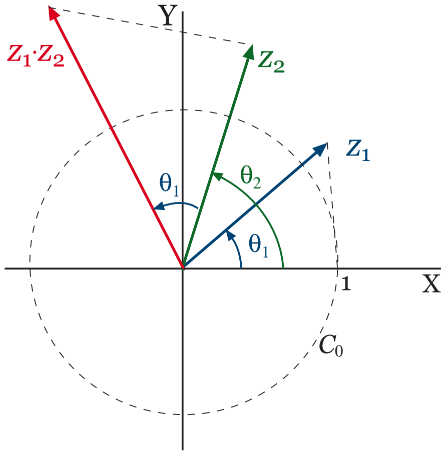
3. Si $z \in \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x \leq 0\}$ entonces

$$\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg} z \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Interpretación geométrica del producto de números complejos

Teniendo en cuenta la Corolario 1.1:





1.4 Potencias y raíces de números complejos

Potencias de un número complejo

Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, la *potencia n-ésima* de z es el número complejo $z^n = z \cdot z \overset{n)}{\cdots} z$. Se define $z^0 = 1$.

Proposición 3. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, se verifica:

1. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica $\begin{cases} z^n \cdot z^m = z^{n+m} \\ (z^n)^m = z^{nm} \\ (z^{-1})^n = (z^n)^{-1} \quad \text{si } z \neq 0 \end{cases}$
2. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifica $z_1^n \cdot z_2^n = (z_1 \cdot z_2)^n$.

Proposición 4. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\theta \in \arg z$ entonces $z^n = |z|^n e^{in\theta}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota: Si $|z| = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \textbf{Fórmula de Moivre} \\ (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ejemplo 4. Cálculo de $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^{12}$.

Raíces de un número complejo

Dado $n \in \mathbb{N}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es *raíz n-ésima* de $z \in \mathbb{C}$ si $w^n = z$. Se denota

$$z^{1/n} = \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}.$$

Proposición 5. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se cumple

$$z^{1/n} = \left\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \ : \ \begin{array}{l} \theta \in \arg z \\ k = k_0, k_0+1, \ldots, k_0+(n-1) \ \wedge \ k_0 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}.$$

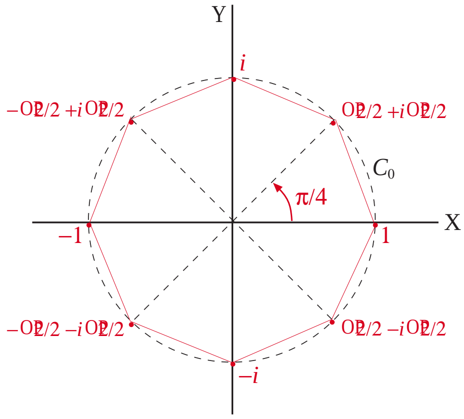
Observación:

- Si $z = 0$, la única raíz n-ésima de z es 0, que es la única solución de $w^n = 0$.
- Si $n = 2$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

$$z^{1/2} = \left\{ \pm\sqrt{|z|} e^{i(Arg z)/2} \right\}.$$

- Gráficamente las raíces n-ésimas de z se distribuyen uniformemente sobre la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt[n]{|z|}$, siendo la amplitud del sector determinado por dos raíces consecutivas de $2\pi/n$ radianes.

Ejemplo 5. Cálculo de las raíces cuadradas de $z_0 = -1 + i\sqrt{3}$ y de las raíces octavas de la unidad.



Representación de las raíces octavas de la unidad

2. Topología del plano complejo $\mathbb{C}$ y del plano ampliado $\mathbb{C}_\infty$

2.1 Topología usual de $\mathbb{C}$

Definición. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 0$. Se define:

a) Disco abierto de centro z_0 y radio r: $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

b) Disco cerrado de centro z_0 y radio r: $\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

c) Disco perforado de centro z_0 y radio r: $D^*(z_0, r) = D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Definición. *Clasificación de puntos respecto a un conjunto:* Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$.

a) z_0 es un punto interior de Ω si $\exists r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$.

b) z_0 es un punto exterior de Ω si es un punto interior de $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

c) z_0 es un punto aislado de Ω si $\exists r > 0$ tal que $D(z_0, r) \cap \Omega = \{z_0\}$.

d) z_0 es un punto de adherente de Ω si $\forall r > 0$ se verifica $D(z_0, r) \cap \Omega \neq \emptyset$.

e) z_0 es un punto de acumulación de Ω si $\forall r > 0$ se verifica $D^*(z_0, r) \cap \Omega \neq \emptyset$.

f) z_0 es un punto frontera de Ω si $\forall r > 0$ se verifica $\begin{cases} D(z_0, r) \cap \Omega \neq \emptyset \\ D(z_0, r) \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) \neq \emptyset. \end{cases}$

- El conjunto de puntos interiores de Ω se llama **interior** de Ω y se denota $\overset{\circ}{\Omega}$.
- El conjunto de puntos exteriores de Ω se llama **exterior** de Ω y se denota $\mathrm{Ext}(\Omega)$.
- El conjunto de puntos aislados de Ω se denota $I(\Omega)$.
- El conjunto de puntos adherentes de Ω se llama **adherencia o clausura** de Ω y se denota $\bar{\Omega}$.
- El conjunto de puntos de acumulación de Ω se denota Ω'.
- El conjunto de puntos frontera de Ω se llama **frontera** de Ω y se denota $\mathrm{Fr}(\Omega)$.

Propiedades inmediatas Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, se verifica:

1. $\overset{\circ}{\Omega} \subset \Omega \subset \bar{\Omega}$. **2.** $\overset{\circ}{\Omega} \subset \Omega' \subset \bar{\Omega}$.

3. $I(\Omega) \subset \mathrm{Fr}(\Omega) \subset \bar{\Omega}$ e $I(\Omega) \cap \overset{\circ}{\Omega} = \emptyset$.

4. $\mathbb{C} = \overset{\circ}{\Omega} \cup \mathrm{Ext}(\Omega) \cup \mathrm{Fr}(\Omega)$ y estos conjuntos son disjuntos dos a dos.

5. $\bar{\Omega} = \Omega' \cup I(\Omega)$ y esta unión es disjunta, esto es, $\Omega' \cap I(\Omega) = \emptyset$.

6. $\bar{\Omega} = \overset{\circ}{\Omega} \cup \mathrm{Fr}(\Omega)$ y esta unión es disjunta, esto es, $\overset{\circ}{\Omega} \cap \mathrm{Fr}(\Omega) = \emptyset$.

7. $\bar{\Omega} = \Omega' \cup \Omega$.

Ejemplo 6. Obtención de $\overset{\circ}{\Omega}$, $\mathrm{Ext}(\Omega)$, $I(\Omega)$, Ω', $\bar{\Omega}$ y $\mathrm{Fr}(\Omega)$, cuando

a) $\Omega = D(z_0, R)$, siendo $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. **b)** $\Omega = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Espacios topológicos generales

Definición. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, esto es $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, es una **topología** en X si verifica:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

2. Si $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}$, donde $\mathcal{J}$ es un conjunto arbitrario, entonces $\bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j \in \mathcal{T}$.

3. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

Se dice que $(X, \mathcal{T})$ es un **espacio topológico** y los elementos de $\mathcal{T}$ **conjuntos abiertos**. El complementario de un conjunto abierto se denomina **conjunto cerrado** en (X, T).

Proposición 7. Si (X, T) es un espacio topológico, entonces $\emptyset$ y X son conjuntos cerrados, la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado y la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Proposición 8. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subset X$. La familia de subconjuntos de S definida como $\mathcal{T}_S = \{S \cap A : A \in \mathcal{T}\}$ es una topología en S, denominada **topología relativa** a S respecto a $(X, \mathcal{T})$.

Proposición 9. La familia $\mathcal{T} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{C} : \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \right\}$ es una topología en $\mathbb{C}$ denominada **topología usual o estándar** de $\mathbb{C}$.

Observación:

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto cerrado $\iff \Omega = \bar{\Omega} \iff \mathrm{Fr}(\Omega) \subset \Omega \iff \Omega' \subset \Omega$.
- Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$, en el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(\mathbb{C}), \subset)$, $\overset{\circ}{\Omega}$ es el mayor abierto contenido en Ω y $\bar{\Omega}$ es el menor cerrado que contiene a Ω.
- Existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados: El conjunto $\Omega = \bar{D}(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ verifica $\overset{\circ}{\Omega} = D^*(z_0, R) \neq \Omega$ y $\bar{\Omega} = \bar{D}(z_0, R) \neq \Omega$.
- Todo disco abierto es un conjunto abierto, todo disco cerrado es un conjunto cerrado. Toda circunferencia es un conjunto cerrado.

Ejemplo 7. La topología relativa a $\mathbb{R}$ respecto a $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$ es la topología usual de $\mathbb{R}$, es decir, la familia formada por uniones arbitrarias de intervalos abiertos, $\mathbb{R}$ y $\emptyset$.

Compacidad y conexión

Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. $K \subset X$ es **compacto** si para toda familia $\mathfrak{F} = \{A_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}$ tal que $K \subset \bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j$ existe una subfamilia finita $\{A_{j_n}\}_{n=1}^N \subset \mathfrak{F}$ tal que $K \subset \bigcup_{n=1}^N A_{j_n}$. Si $K = X$ se dice que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio compacto.

Ejemplo 8.

a) Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, el conjunto vacío y todo conjunto finito son conjuntos compactos.

b) $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$ no es un espacio compacto: Por ejemplo, de la familia $\mathfrak{F} = \{A_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{T}$, donde $A_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ y $A_n = D(n, 1/2)\ \forall n \in \mathbb{N}$, y cuya unión es $\mathbb{C}$, no existe ninguna subfamilia finita cuya unión cubra $\mathbb{C}$.

Definición. $\Omega \subset \mathbb{C}$ es **acotado** si $\exists M > 0$ tal que $\forall z \in \Omega$ se verifica $|z| \leq M$.

Observación:

- Todo subconjunto de un conjunto acotado es acotado.
- La unión finita de conjuntos acotados es acotado.

Teorema de Heine-Borel. Dado $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$, un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ es compacto si y sólo si K es un conjunto cerrado y acotado.

Ejemplo 9. Los discos cerrados y las circunferencias son conjuntos compactos.

Definición. Dado $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, $S \subset X$ es **conexo** si $\nexists A, B \in \mathcal{T}$ tales que
1. $S \subset A \cup B$. **2.** $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap B \neq \emptyset$. **3.** $S \cap A \cap B = \emptyset$.

Si $\exists A, B \in \mathcal{T}$ cumpliendo 1,2 y 3, se dice que S es no conexo y que A y B separan o desconectan S. También se dice que el par de conjuntos A y B es una separación de S.

Ejemplo 10. En todo espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $\emptyset$ y $S = \{x\}$ son conexos $\forall x \in X$.

Proposición 10. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, $z_k \neq z_{k+1}$ $\forall k = 1, \ldots, n-1$. Se cumple:
- El segmento $[z_1, z_2] = \{z_1 + \lambda(z_2 - z_1) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ es conexo en $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$.
- La poligonal $[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \ldots \cup [z_{n-1}, z_n]$ es conexo en $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$.

Definición. $\Omega \subset \mathbb{C}$ es **conexo por poligonales** si dados $z, w \in \Omega$ existe una poligonal contenida en Ω que une z y w.

Proposición 11. Dado el espacio topológico $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$ y $\Omega \subset \mathbb{C}$, se cumple:
- Si Ω es conexo por poligonales $\Longrightarrow$ Ω es conexo.
- Si Ω es un conjunto abierto, se verifica

$$\Omega \text{ es conexo } \Longleftrightarrow \Omega \text{ es conexo por poligonales.}$$

Definición. Dado $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$, Ω es un **dominio** si es abierto y conexo en $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$.

Ejemplo 11. Son conjuntos no conexos en $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$:
a) Todo conjunto $S \subset \mathbb{C}$ finito y con más de un punto.
b) $S = D(-1, 1) \cup D(1, 1)$.

Ejemplo 12. Son conjuntos conexos por poligonales en $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$:
a) $\mathbb{C}$.
b) Toda recta.
c) Todo disco abierto, todo disco cerrado y todo disco sin parte de su frontera.
d) El conjunto $S \cup \{0\}$, siendo S el definido en el ejemplo 11.
e) El peine del topólogo:
$P = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{iy : y \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq y \leq 1\} \cup \left\{\frac{1}{n} + iy : n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq y \leq 1\right\}$

Ejemplo 13. Son conjuntos conexos pero no conexos por poligonales en $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$:
a) Toda circunferencia.
b) $P \setminus \{0\}$, donde P es el peine del topólogo.

Observación: $\mathbb{C}$ conexo $\Longrightarrow$ $\emptyset, \mathbb{C}$ son los únicos abiertos y cerrados a la vez en $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$.

2.1 El plano complejo ampliado y la esfera de Riemann

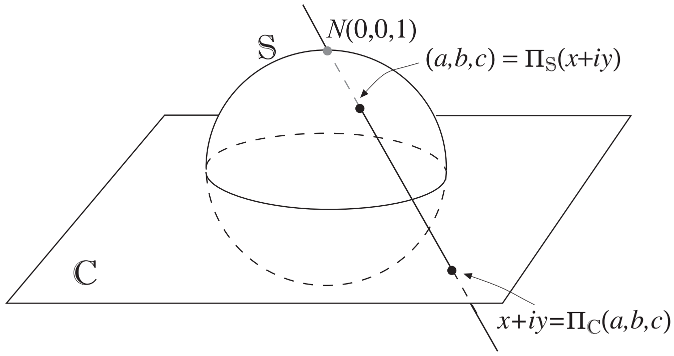
Proposición 12. Dado el conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde ∞ representa un elemento que no pertenece a $\mathbb{C}$, la familia $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T} \cup \{\mathbb{C}_\infty \setminus K : K \subset \mathbb{C} \text{ es compacto}\}$ es una topología en $\mathbb{C}_\infty$ tal que $\mathcal{T}_\infty|_{\mathbb{C}} = \mathcal{T}$.

Proposición 13. $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ es un espacio compacto y conexo.

La esfera de Riemann y la proyección estereográfica

$\mathbb{C}_\infty$ se identifica con la esfera de Riemann $\mathbb{S} = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 + c^2 = 1\right\}$ mediante la proyección estereográfica $\Pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{S} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definida

$$\Pi_{\mathbb{C}}(a, b, c) = \begin{cases} \dfrac{a}{1-c} + i\dfrac{b}{1-c} & \text{si } (a, b, c) \in \mathbb{S} \setminus \{(0, 0, 1)\}, \\ \infty & \text{si } (a, b, c) = (0, 0, 1). \end{cases}$$



Si $\Pi_{\mathbb{S}} = \Pi_{\mathbb{C}}^{-1}$, se tiene $\Pi_{\mathbb{S}}(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{2\,\mathrm{Re}\,z}{|z|^2+1}, \dfrac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|z|^2+1}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) & \text{si } z \in \mathbb{C}, \\ (0,0,1) & \text{si } z = \infty. \end{cases}$

Se puede demostrar que$(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ y $(\mathbb{S}, \mathcal{T}_u^3|_{\mathbb{S}})$, donde $\mathcal{T}_u^3|_{\mathbb{S}}$ denota la topología usual de $\mathbb{R}^3$, son topológicamente equivalentes.

$\Pi_{\mathbb{S}}$ permite definir

$$d_\infty(z_1, z_2) = d_3(\Pi_{\mathbb{S}}(z_1), \Pi_{\mathbb{S}}(z_2)) = \begin{cases} \dfrac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+1}\,\sqrt{|z_2|^2+1}} & \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \dfrac{2}{\sqrt{|z_1|^2+1}} & \text{si } z_1 \in \mathbb{C} \text{ y } z_2 = \infty, \\ 0 & \text{si } z_1 = z_2 = \infty. \end{cases}$$

donde d_3 denota la distancia euclídea en $\mathbb{R}^3$.

Algunas propiedades de d_∞

1. d_∞ es una distancia en $\mathbb{C}_\infty$ denominada **distancia cordal**.
2. d_∞ es acotada y alcanza su mayor valor si $\Pi_{\mathbb{S}}(z_1)$ y $\Pi_{\mathbb{S}}(z_2)$ son puntos antípodas sobre $\mathbb{S}$: $d_\infty(0,\infty) = d_3((0,0,-1),(0,0,1)) = 2$.
3. La topología que induce d_∞ en $\mathbb{C}_\infty$ es $\mathcal{T}_\infty$.
4. La distancia cordal no extiende la métrica euclídea; además no existe ninguna métrica en $\mathbb{C}_\infty$ que induzca la topología $\mathcal{T}_\infty$ y, a la vez, extienda la métrica euclídea de $\mathbb{C}$.